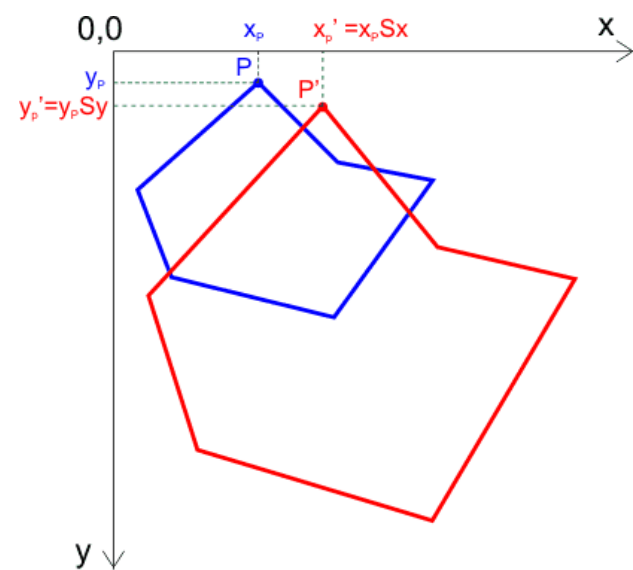
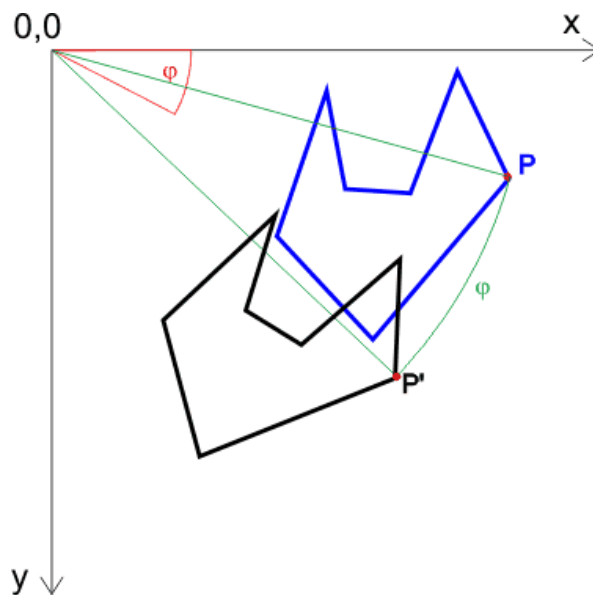
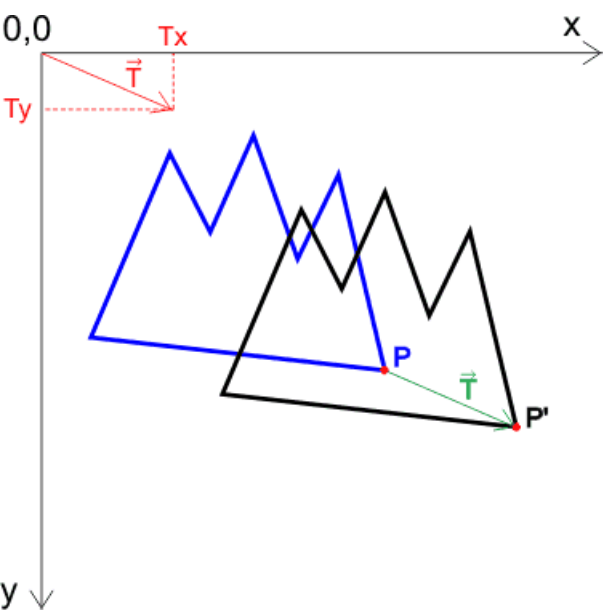


INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Translacja

Rotacja

Skalowanie



INFORMATYKA GEODEZYJNO- KARTOGRAFICZNA

Plan wykładu

Przedstawienie podstawowej problematyki dotyczącej translacji współrzędnych kartograficznych

INFORMATYKA GEODEZYJNO- KARTOGRAFICZNA

Translacja

Translacja, przesunięcie –

przekształcenie prostej, płaszczyzny lub dowolnej przestrzeni, które należy rozumieć jako równoległe przesunięcie wszystkich punktów dziedziny bez deformacji i obracania.

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Translacja

Translacja, przesunięcie –

Niech $\mathbf{V}$ będzie dowolnym wektorem (swobodnym) pewnej przestrzeni afinicznej V .

Translacją $T_{\mathbf{v}}$ nazywamy przekształcenie dane wzorem:

$$T_{\mathbf{v}}(x) = x + \mathbf{v}.$$

Wektor $\mathbf{V}$ nazywamy *wektorem translacji*.

Niekiedy także obraz figury A w przekształceniu $T_{\mathbf{v}}$ nazywa się **translacją** figury A o wektor $\mathbf{v}$ i oznacza $A + \mathbf{V}$

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Translacja

Translacja, przesunięcie –

Wśród wielu niezmienników izometrii najważniejszymi niezmiennikami translacji są:

- **kierunek** (tzn. klasa prostych równoległych),
- **odległość** punktów,
- **orientacja** przestrzeni.

INFORMATYKA GEODEZYJNO-

Grafika komputerowa i wizualizacja



Wprowadzenie

- Przekształcenia 2D
- Współrzędne jednorodne
- Przekształcenia 3D
- Składanie przekształceń
- Obliczenia numeryczne
- Kwaterniony

INFORMATYKA GEODEZYJNO-

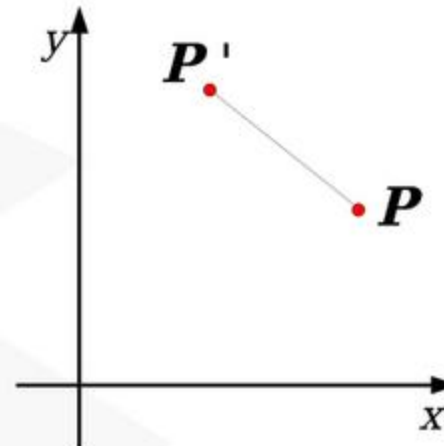
Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 2D, zapis macierzowy

Wektor $\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$ opisuje położenie punktu P na płaszczyźnie.

Przekształcenie P na P'



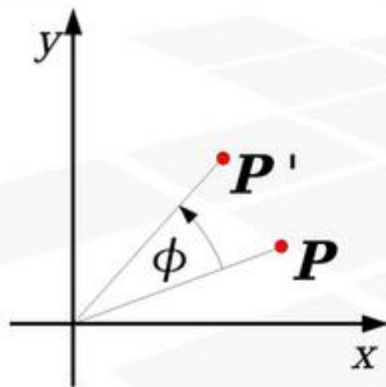
Jak opisać w prosty sposób przekształcenie z wykorzystaniem rachunku macierzowego?

INFORMATYKA GEODEZYJNO-

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 2D, obrót, problem przesunięcia I



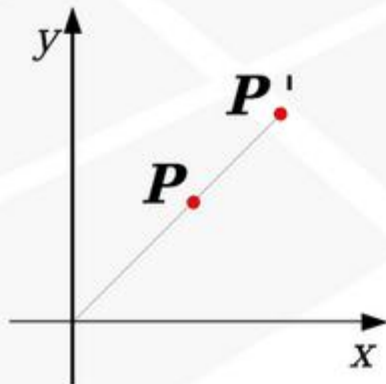
Obrót

$$x' = x \cdot \cos(\phi) - y \cdot \sin(\phi)$$

$$y' = x \cdot \sin(\phi) + y \cdot \cos(\phi)$$

czyli $\mathbf{P}' = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{P}$

gdzie $\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$



Skalowanie

$$x' = s \cdot x$$

$$y' = s \cdot y$$

czyli $\mathbf{P}' = \mathbf{M}_S \cdot \mathbf{P}$ gdzie $\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$

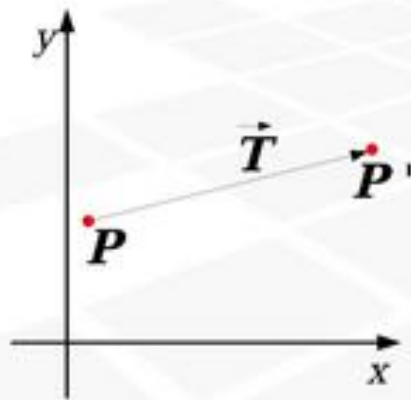
Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 2D, obrót, problem przesunięcia II



Przesunięcie

$$x' = x + T_x$$

$$y' = y + T_y$$

czyli $\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{M}_T$ gdzie $\mathbf{M}_T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$

Czy można opisać przesunięcie analogicznie do obrotu i skalowania?

Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Współrzędne jednorodne znormalizowane

Punkt $\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix}$ ma współrzędne jednorodne znormalizowane $\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ 1 \end{bmatrix}$,

analogicznie w przestrzeni trójwymiarowej

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

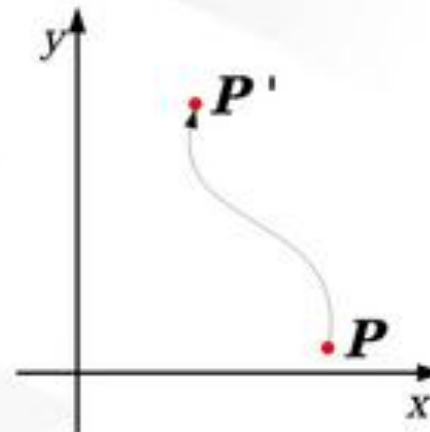
INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia

$$P' = M \cdot P$$



Opis operacji w postaci lewostronnego mnożenia macierzy

- Dla operacji 2D macierze przekształceń 3x3
- Dla operacji 3D macierze przekształceń 4x4

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 2D, symetrie I

Symetrie osiowe

$$M_{SOX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{SOY} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Symetria względem OX



Symetria względem OY

Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 2D, symetrie II

Symetria środkowa

$$M_{ss} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 2D, obrót

$$M_{O\phi} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt ϕ

Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 2D, przesunięcie

$$M_{TxTy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Przesunięcie (translacja) o wektor $[T_x, T_y]$

Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 2D, skalowanie

$$M_{S_x S_y} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Skalowanie jest przykładem przekształcenia **nieizometrycznego**, tj. niezachowującego odległości punktów.

Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 2D, pochylenie

$$M_{Px} = \begin{bmatrix} 1 & H_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{Py} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ H_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



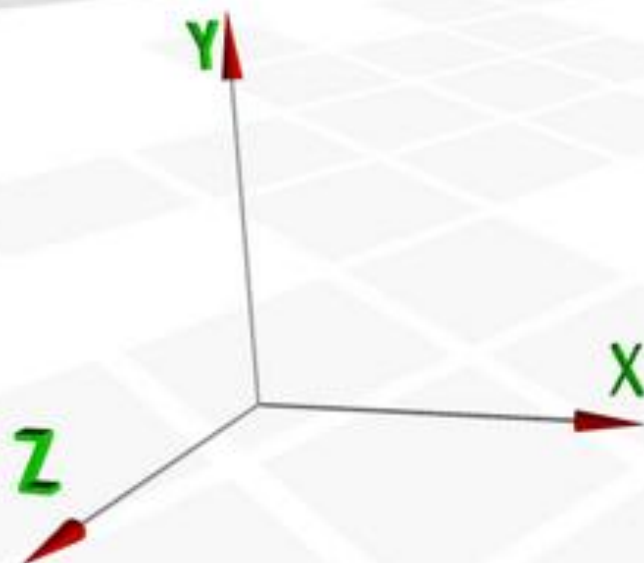
Pochylenie jest również przykładem przekształcenia **nieizometrycznego**.

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

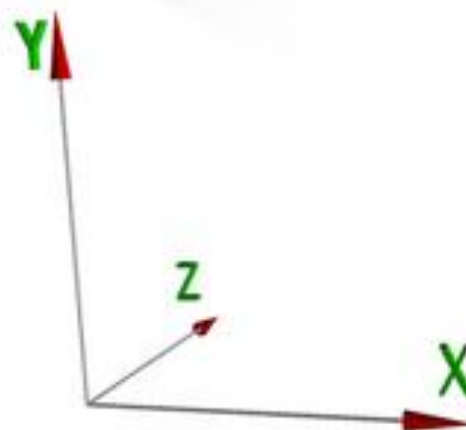
Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, skrętność układu współrzędnych



Układ prawoskrętny



Układ lewoskrętny

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D

$$\mathbf{M}_{PT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \mathbf{P}' = \mathbf{M}_{PT} \cdot \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{P}' = \mathbf{P}$$

Macierz $\mathbf{M}_{PT}$ reprezentuje przekształcenie tożsamościowe

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, symetrie I

$$M_{YOZ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Symetria płaszczyznowa
względem YOZ



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, symetrie II

$$M_{OX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Symetria osiowa względem OX



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

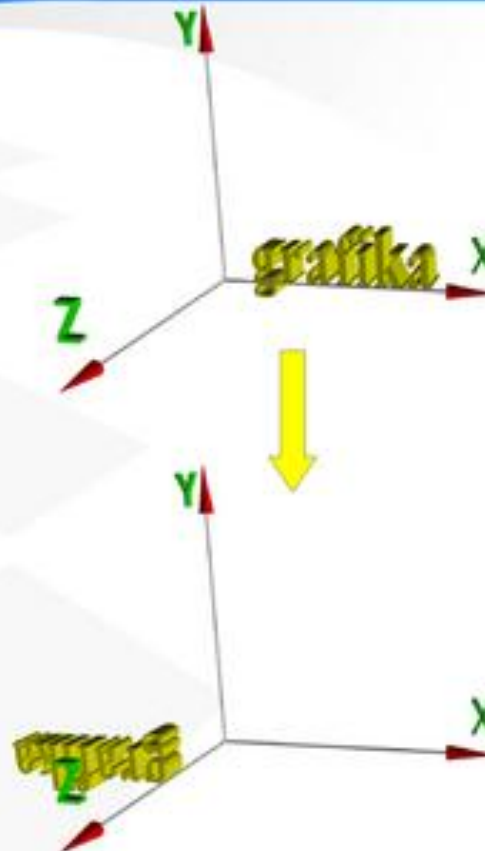
Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, symetrie III

$$M_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Symetria środkowa



Przekształcenia geometryczne

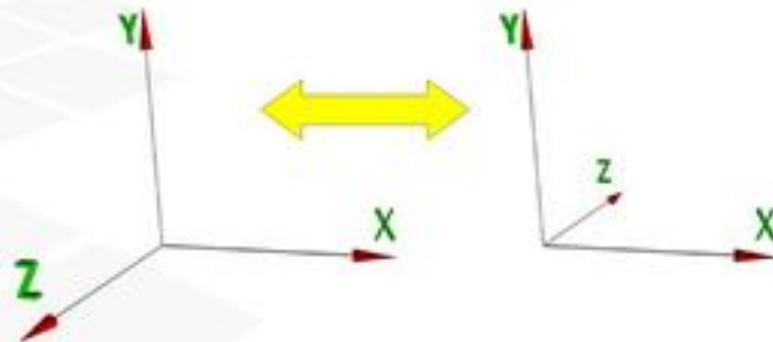
INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, symetrie IV

$$M_{XOY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Symetria płaszczyznowa względem XOY

Przekształcenie zmienia skrętność układu współrzędnych

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, przesunięcie I

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_X \\ 0 & 1 & 0 & T_Y \\ 0 & 0 & 1 & T_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przesunięcie
o wektor $[T_X \ T_Y \ T_Z]$



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, przesunięcie II

$$\begin{bmatrix} x'_P \\ y'_P \\ z'_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_X \\ 0 & 1 & 0 & T_Y \\ 0 & 0 & 1 & T_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'_P = x_P + T_X \\ y'_P = y_P + T_Y \\ z'_P = z_P + T_Z \end{cases}$$

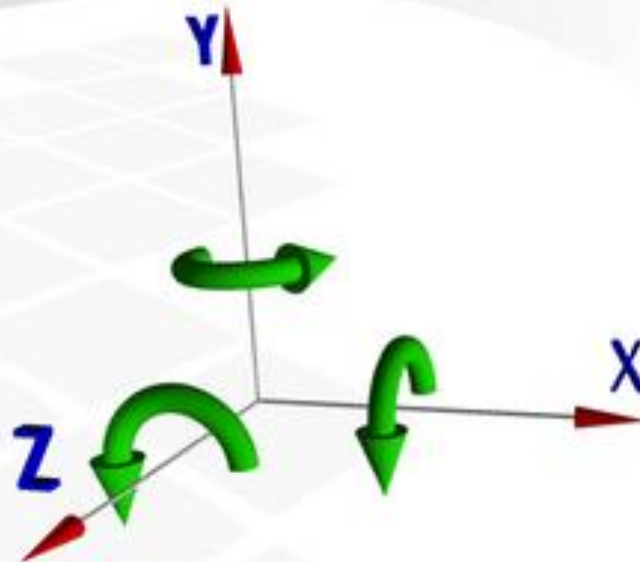
Operacja przesunięcia punktu o wektor $[T_X \ T_Y \ T_Z]$
w postaci macierzowej i jako układ równań

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, obroty I



Definicja dodatnich obrotów w prawoskrętnym układzie współrzędnych

Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, obroty II

$$M_{OX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_X) & -\sin(\phi_X) & 0 \\ 0 & \sin(\phi_X) & \cos(\phi_X) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obrót o kąt ϕ_X wokół osi OX



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

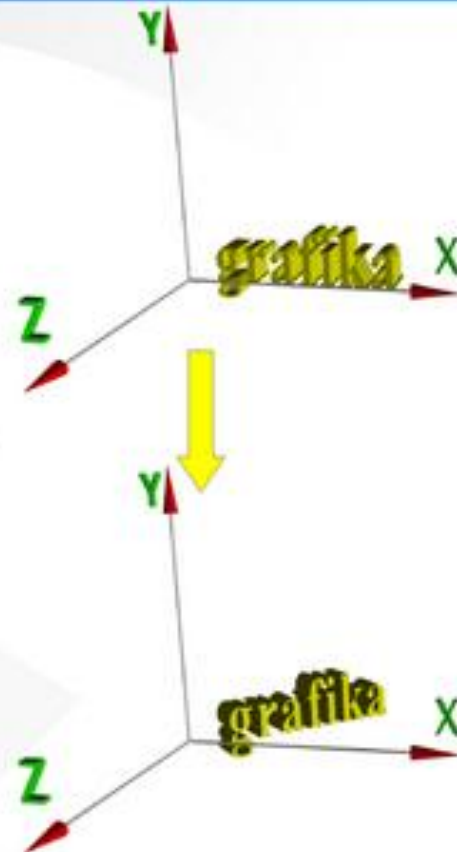
Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, obroty III

$$M_{OY} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_Y) & 0 & \sin(\phi_Y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi_Y) & 0 & \cos(\phi_Y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obrót o kąt ϕ_Y wokół osi OY



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, obroty IV

$$M_{OZ} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_Z) & -\sin(\phi_Z) & 0 & 0 \\ \sin(\phi_Z) & \cos(\phi_Z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obrót o kąt ϕ_Z wokół osi OZ



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, skalowanie

$$M_{Sk} = \begin{bmatrix} S_X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie $\begin{cases} S_X \neq 0 \\ S_Y \neq 0 \\ S_Z \neq 0 \end{cases}$

Skalowanie jest przykładem przekształcenia nieizometrycznego.



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

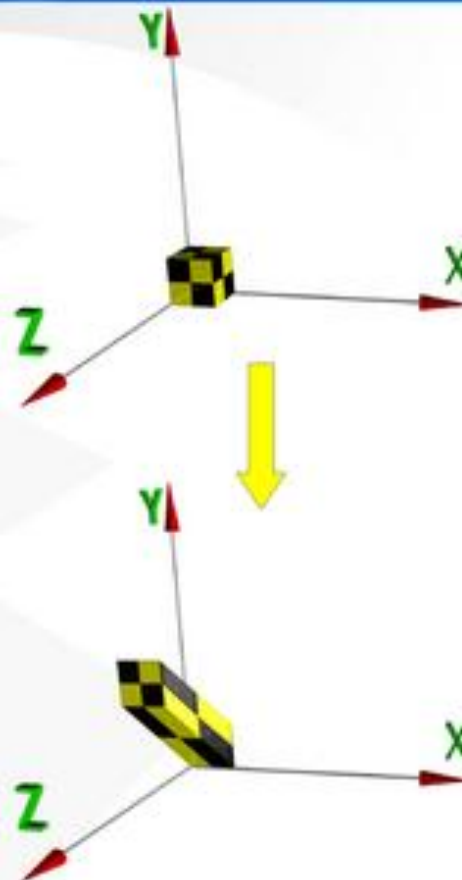
Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenia 3D, pochylenie

$$M_{PXY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & H_X & 0 \\ 0 & 1 & H_Y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pochylenie jest przykładem przekształcenia nieizometrycznego.



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Składanie przekształceń I

$$P' = M_1 \cdot P \wedge P'' = M_2 \cdot P' \Rightarrow P'' = M_2 \cdot M_1 \cdot P$$

Mnożenie macierzy jest operacją łączną zatem

$$M_{21} = M_2 \cdot M_1$$

a więc

$$P'' = M_{21} \cdot P$$

- Dane są dowolne operacje M_1 i M_2
- Mnożenie macierzy nie jest przemienne, kolejność operacji nie jest obojętna

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Składanie przekształceń II

Problem punktu odniesienia

Powiększanie „M3”
dwa razy bez punktu
odniesienia



Powiększanie „M3”
dwa razy
z uwzględnieniem
punktu odniesienia



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przekształcenie odwrotne

Jeżeli $P' = M_1 \cdot P$

oraz $P = M_2 \cdot P'$

to $M_2 = M_1^{-1}$

Czy zawsze wyznaczenie macierzy przekształcenia odwrotnego wymaga policzenia macierzy odwrotnej?

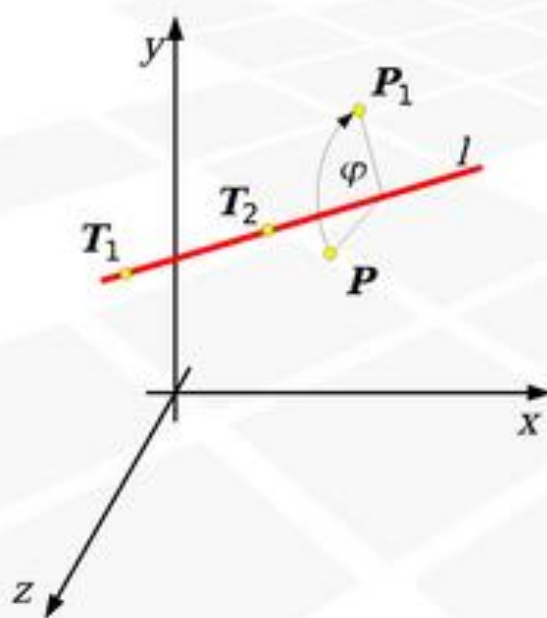
Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przykład obrotu wokół prostej l



Dana jest prosta l :
$$\begin{cases} x = x_0 + \mu A \\ y = y_0 + \mu B \\ z = z_0 + \mu C \end{cases}$$

oraz punkty $T_1[x_0, y_0, z_0]$
i $T_2[x_0 + A, y_0 + B, z_0 + C]$

Wektor $\overrightarrow{T_1 T_2}$ określa
zorientowanie prostej.

Zadanie: obrócić punkt P wokół prostej l o kąt φ

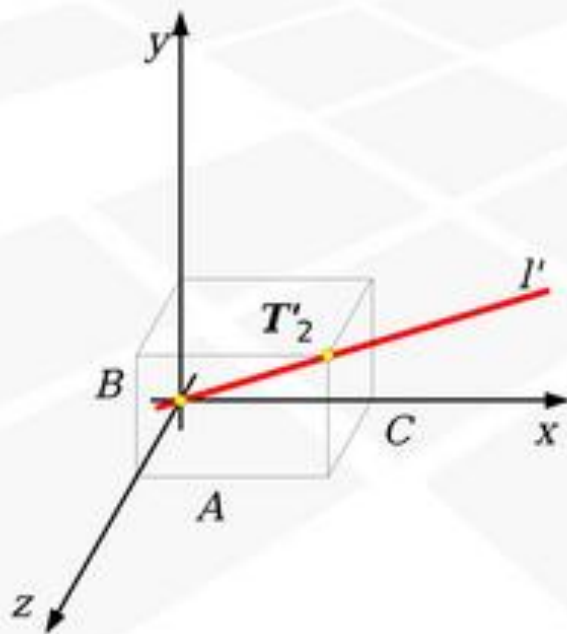
INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przykład obrotu wokół prostej / II

1. etap. Przesunięcie o wektor $[-x_0, -y_0, -z_0]$



$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

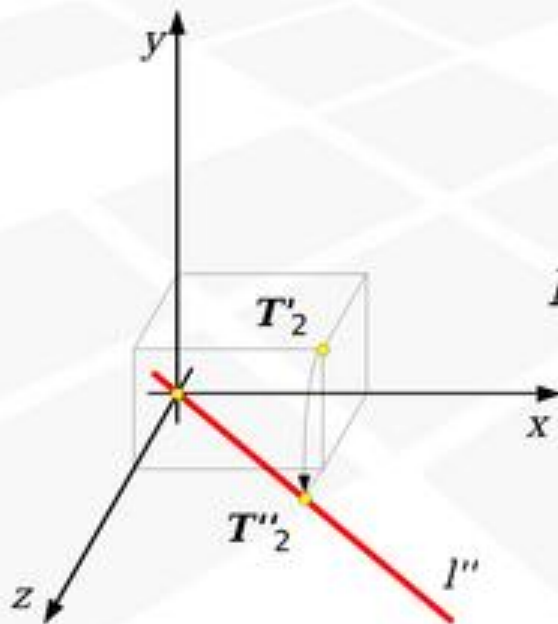
Grafika komputerowa i wizualizacja



Przykład obrotu wokół prostej / III

2. etap. Obrót prostej l wokół osi OX o kąt ϕ_x taki, że

$$\operatorname{tg} \phi_x = \frac{B}{C}$$



$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} & \frac{-B}{\sqrt{B^2+C^2}} & 0 \\ 0 & \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}} & \frac{-C}{\sqrt{B^2+C^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

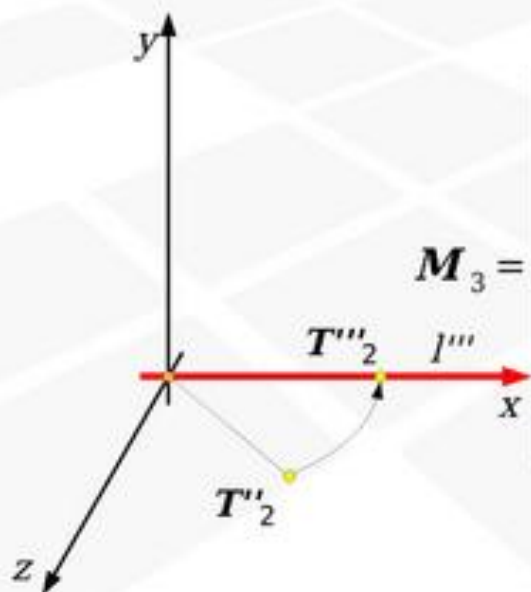
Grafika komputerowa i wizualizacja



Przykład obrotu wokół prostej / IV

3. etap. Obrót prostej l wokół osi OY o kąt ϕ_Y taki, że

$$\operatorname{tg} \phi_Y = \frac{\sqrt{B^2 + C^2}}{A}$$



$$M_3 = \begin{bmatrix} \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & 0 & \frac{\sqrt{B^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{B^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & 0 & \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przekształcenia geometryczne

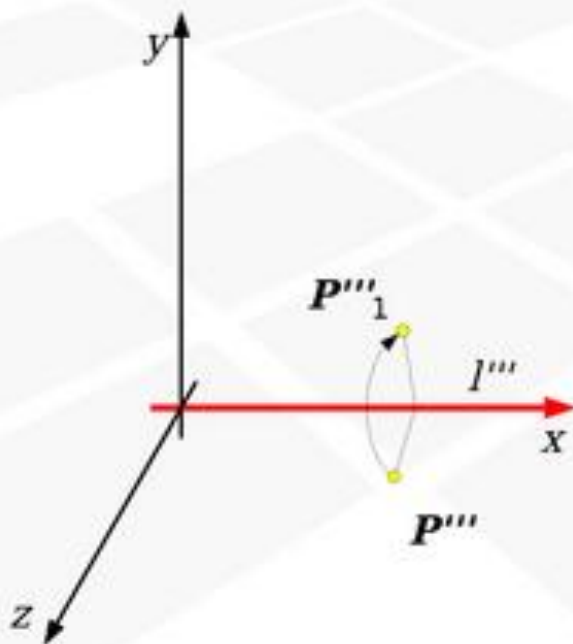
INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przykład obrotu wokół prostej $l \vee$

4. etap. Obrót punktu P o kąt φ wokół osi OX



$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Przykład obrotu wokół prostej / VI

Przekształcenie całkowite jest złożeniem przekształceń kolejnych etapów.

Macierz przekształcenia całkowitego:

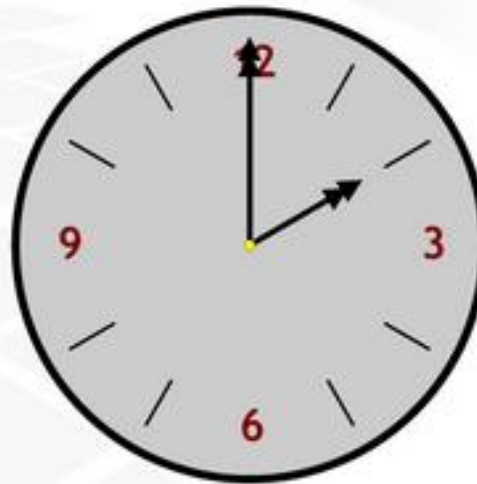
$$M_c = M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot M_3^{-1} \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$$

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Problemy dokładności obliczeń numerycznych I



Przykład zegara

Zadanie: wyznaczyć kolejne położenia wskazówki obracającej się co minutę o kąt $d\alpha$, szukamy kolejnych kątów α_i

Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

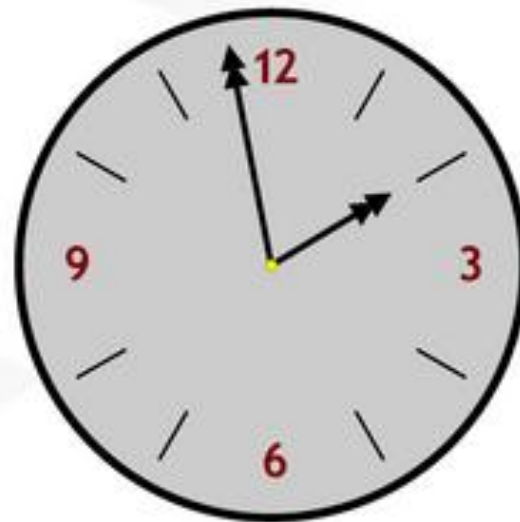
Grafika komputerowa i wizualizacja



Problemy dokładności obliczeń numerycznych II

```
i = 0;   $\alpha_0 = 0$ ;  
 $d\alpha = 2 * \pi / 60$ ;  
while ()  
{  
     $i = i + 1$ ;  
     $\alpha_i = \alpha_{i-1} + d\alpha$ ;  
}
```

Algorytm naiwny



Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Problemy dokładności obliczeń numerycznych III

$$\text{repr}(x) = x \cdot (1 + \epsilon) \quad \text{gdzie } |\epsilon| < \delta, \quad \delta \in \langle 10^{-16}, 10^{-7} \rangle$$

$$\text{repr}(x + y) = (x + y) \cdot (1 + \epsilon)$$

w algorytmie naiwnym

$$i=1 : \text{repr}(\alpha_1) = (0 + d \alpha) \cdot (1 + \epsilon_1)$$

$$i=2 : \text{repr}(\alpha_2) = ((0 + d \alpha) \cdot (1 + \epsilon_1) + d \alpha) \cdot (1 + \epsilon_2)$$

$$i=3 : \text{repr}(\alpha_3) = (((0 + d \alpha) \cdot (1 + \epsilon_1) + d \alpha) \cdot (1 + \epsilon_2) + d \alpha) \cdot (1 + \epsilon_3)$$

...

Nakładanie się błędów w algorytmie naiwnym

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Problemy dokładności obliczeń numerycznych IV

```
 $i = 0; \quad \alpha_0 = 0;$ 
```

```
 $d\alpha = 2 * \pi / 60;$ 
```

```
while ()
```

```
{
```

```
     $i = i + 1;$ 
```

```
     $\alpha_i = i * d\alpha;$ 
```

```
}
```

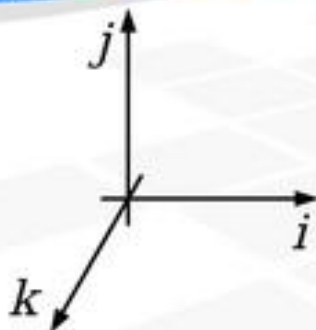
Algorytm, który nie powoduje nakładania się błędów

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Kwaterniony I



$$\begin{array}{ll} i \cdot i = -1 & i \cdot j = -j \cdot i = k \\ j \cdot j = -1 & j \cdot k = -k \cdot j = i \\ k \cdot k = -1 & k \cdot i = -i \cdot k = j \end{array}$$

kwaternion $q = s + x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k = (s, \vec{v})$, $\vec{v} = [x, y, z]$

kwaternion przeciwny $q' = (s, -\vec{v})$ $|q| = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$

kwaternion odwrotny $q^{-1} = \frac{q'}{|q|}$

Przekształcenia geometryczne

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Kwaterniony II

$$\text{Niech } q_1 = (s_1, \vec{v}_1) \quad q_2 = (s_2, \vec{v}_2)$$

$$q_1 + q_2 = (s_1 + s_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2)$$

$$q_1 \cdot q_2 = (s_1 \cdot s_2 - \vec{v}_1 \circ \vec{v}_2, s_1 \cdot \vec{v}_2 + s_2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$$

$$(q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 = q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3)$$

$$q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$$

INFORMATYKA GEODEZYJNO-KARTOGRAFICZNA

Grafika komputerowa i wizualizacja



Kwaterniony III

$$\mathbf{P}[x_P, y_P, z_P] \rightarrow Q_P = (0, \vec{r})$$

gdzie $\vec{r} = [x_P, y_P, z_P]$

Niech $\vec{u}$ określa prostą, wokół której dokonujemy obrotu przestrzeni o kąt φ .

$$q_u = (\cos(\frac{\varphi}{2}), \vec{u} \cdot \sin(\frac{\varphi}{2}))$$
$$Q_{Pu} = q_u \cdot Q_P \cdot q_u^{-1}$$

INFORMATYKA GEODEZYJNO- KARTOGRAFICZNA

INFORMATYKA GEODEZYJNO- KARTOGRAFICZNA