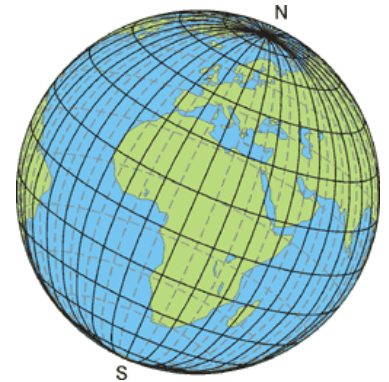
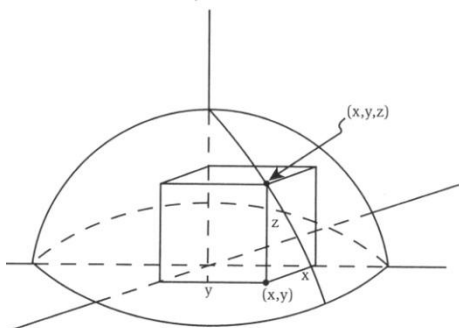


Układy współrzędnych

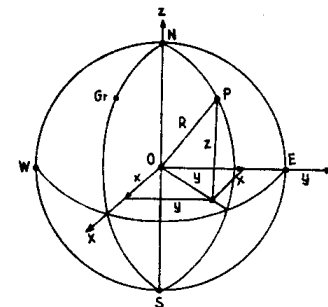


Układ współrzędnych – matematycznie - funkcja przypisująca każdemu punktowi danej przestrzeni skończony ciąg (krotkę) liczb rzeczywistych zwanych **współrzędnymi** punktu.

Układ współrzędnych – umowny system wyrażania położenia punktu w układzie odniesienia (np. płaszczyzna, kula, elipsoida)



Układ przestrzennych współrzędnych prostokątnych



Jest to kartezjański układ współrzędnych albo inaczej to układ współrzędnych, w którym zadane są:

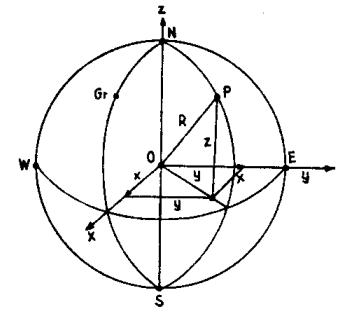
- punkt zwany **środkiem** lub **początkiem układu współrzędnych**, którego wszystkie współrzędne są równe zero, często oznaczany literą O lub cyfrą zero.
- zestaw n osi liczbowych zwanych **osiąmi układu współrzędnych**, z których każde dwie są do siebie prostopadłe i których zera znajdują się w wybranym początku układu. Trzy pierwsze osie często oznaczane są :
 - OX (pierwsza oś, zwana **osią odciętych**),
 - OY (druga zwana **osią rzędnych**),
 - OZ (trzecia oś).

Rozpatrujemy zbiór E^3 elementów w postaci $\vec{r} = [x, y, z]$

Przyjmujemy, że zbiór E^3 jest zamknięty ze względu na działanie dodawania, tzn. że dla każdej pary wektorów spełniona jest relacja

$$\{\vec{r}_1 = [x_1, y_1, z_1] \in E^3; \vec{r}_2 = [x_2, y_2, z_2] \in E^3\} \Rightarrow \{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2] \in E^3\}$$

Układ przestrzennych współrzędnych prostokątnych



W takim zbiorze E^3 wektorów można wyróżnić:

element zerowy

$$\vec{0} = [0, 0, 0] \in E^3$$

element przeciwny

$$\vec{\tau} = -\vec{r} \in E^3$$

W zbiorze E^3 również może mieć miejsce łączne i przemienne oraz rozdzielne względem dodawania mnożenie elementów należących do zbioru R liczb rzeczywistych przez elementy należące do zbioru E^3

Zbiór E^3 elementów spełniający te własności nazywamy **przestrzenią liniową**.

Przestrzeń liniową, w której określony jest iloczyn skalarny nazywamy **przestrzenią liniową unitarną**

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \angle(\vec{p}, \vec{q})$$

W przestrzeni euklidesowej E^3 możliwa jest realizacja także iloczynu wektorowego

Trzy dowolne wybrane, różne i niezerowe wektory należące do E^3 tworzą tzw. **bazę wektorową zupełną** w E^3

$$\vec{e}_1 = [1, 0, 0]$$

W szczególności wektory

$$\vec{e}_2 = [0, 1, 0]$$

tworzą bazę unormowaną zupełną (są wersorami osi nieortogonalnego

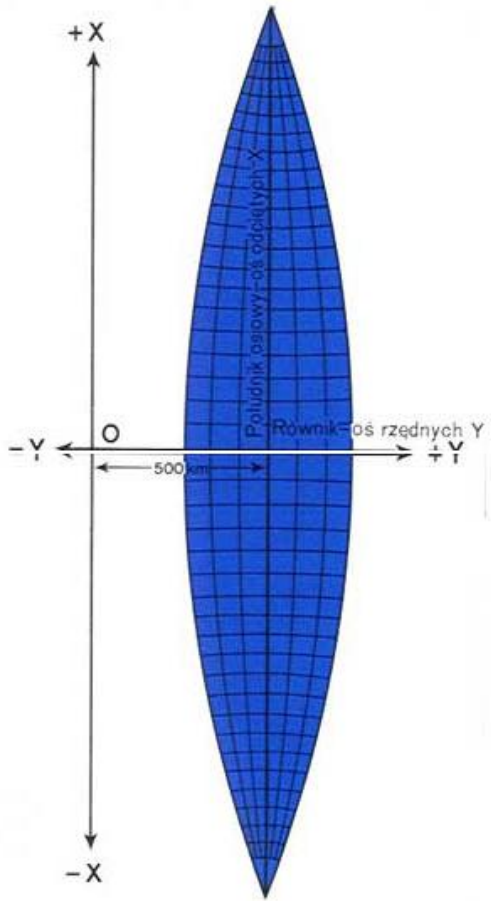
układu kartezjańskiego)

$$\vec{e}_3 = [0, 0, 1]$$

Każdy wektor $\vec{r} \in E^3$

można przedstawić za pomocą wyrażenia: $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3; \quad x, y, z \in R$

Układ współrzędnych prostokątnych płaskich

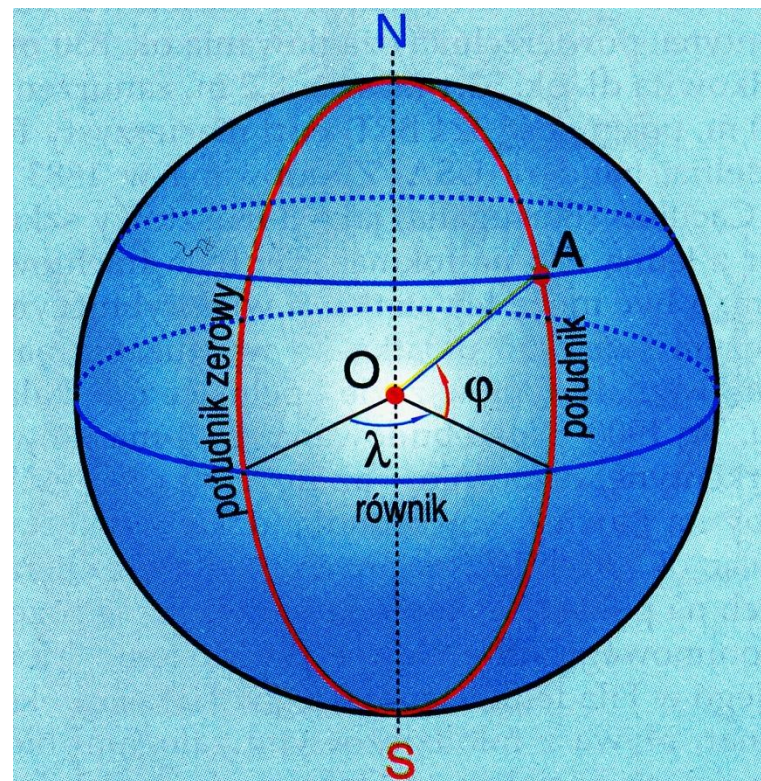


Układ współrzędnych prostokątnych płaskich. Każdy pas odwzorowania ma swój układ współrzędnych, których początek stanowi punkt przecięcia się południka osiowego z równikiem!!!!!!

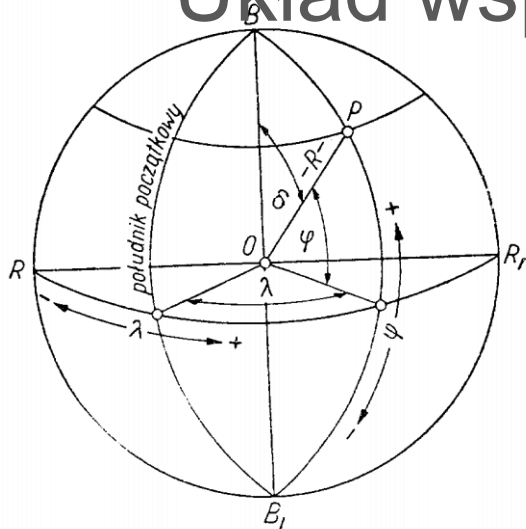
Układ współrzędnych geograficznych

Współrzędne geograficzne to współrzędne sferyczne określające położenie punktów na powierzchni Ziemi.

- długość geograficzna λ
- szerokość geograficzna φ



Układ współrzędnych geograficznych



Podzbiór punktów $(x,y,z) \in E^3$ w układzie ortokartezjańskim spełniających równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

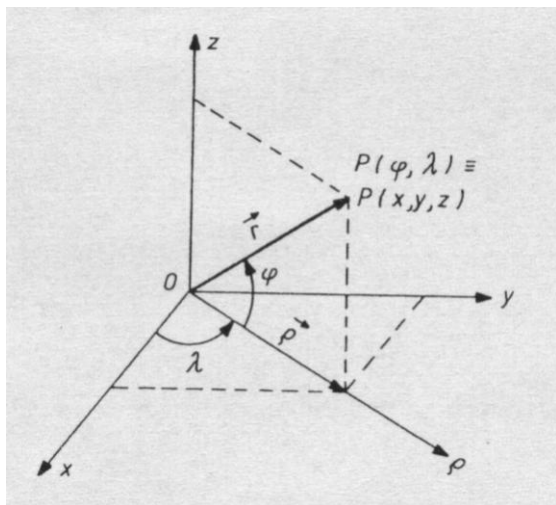
Współrzędne x,y,z mnożone odpowiednio przez wersory i,j,k w układzie ortokartezjańskim utworzą składowe wektora r stąd:

$$|\vec{r}| = R$$

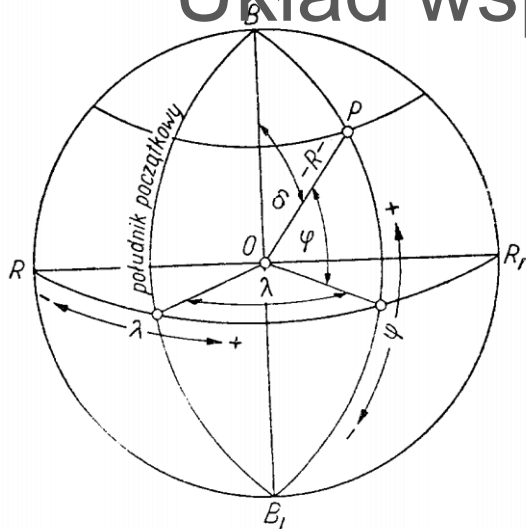
Oznaczając $\vec{\rho} = [x, y]$ przyjmując $\varphi = \angle(\vec{\rho}, \vec{r})$
 $\lambda = \angle[\vec{i}, \vec{\rho}]$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x = |\vec{\rho}| \cos \lambda = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = |\vec{\rho}| \sin \lambda = R \cos \varphi \sin \lambda \\ z = |\vec{\rho}| \operatorname{tg} \varphi = R \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$|\vec{\rho}| = R \cos \varphi$$



Układ współrzędnych geograficznych



Z definicji parametrów φ, λ wynika, że zbiór wszystkich punktów (φ, λ) należących do powierzchni kuli ma postać:

$$\hat{\omega} = \left\{ (\varphi, \lambda) : \begin{array}{l} \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ \lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle \end{array} \right\}$$

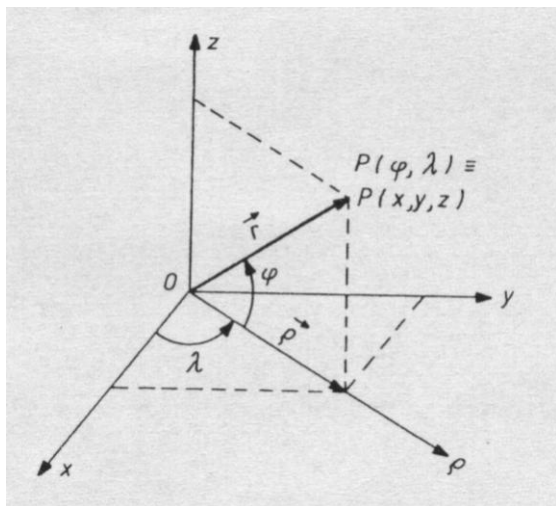
Linie $\varphi = \text{const}$ nazywamy równoleżnikami

$\lambda = \text{const}$ nazywamy południkami

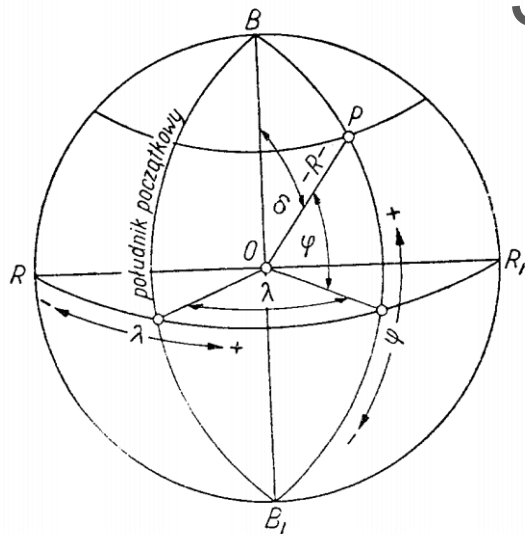
Linie te wyznaczają układ geograficzny na powierzchni kuli

$\lambda = 0$ – południk zerowy

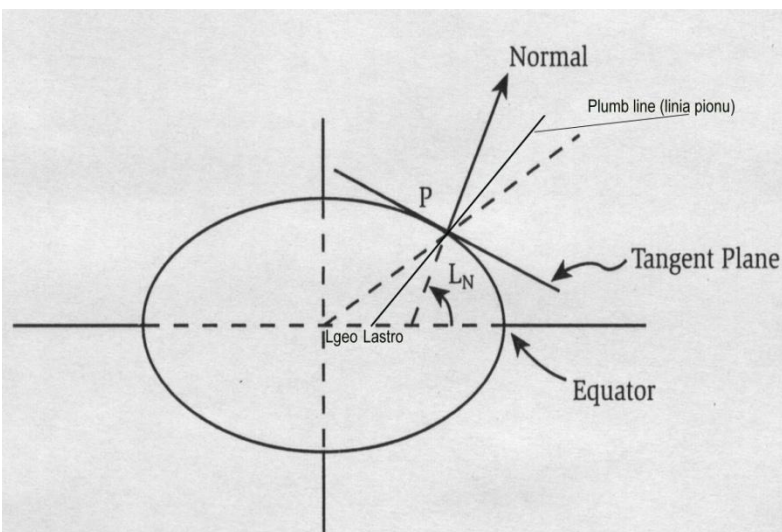
$\lambda = -\pi$ - antypoda



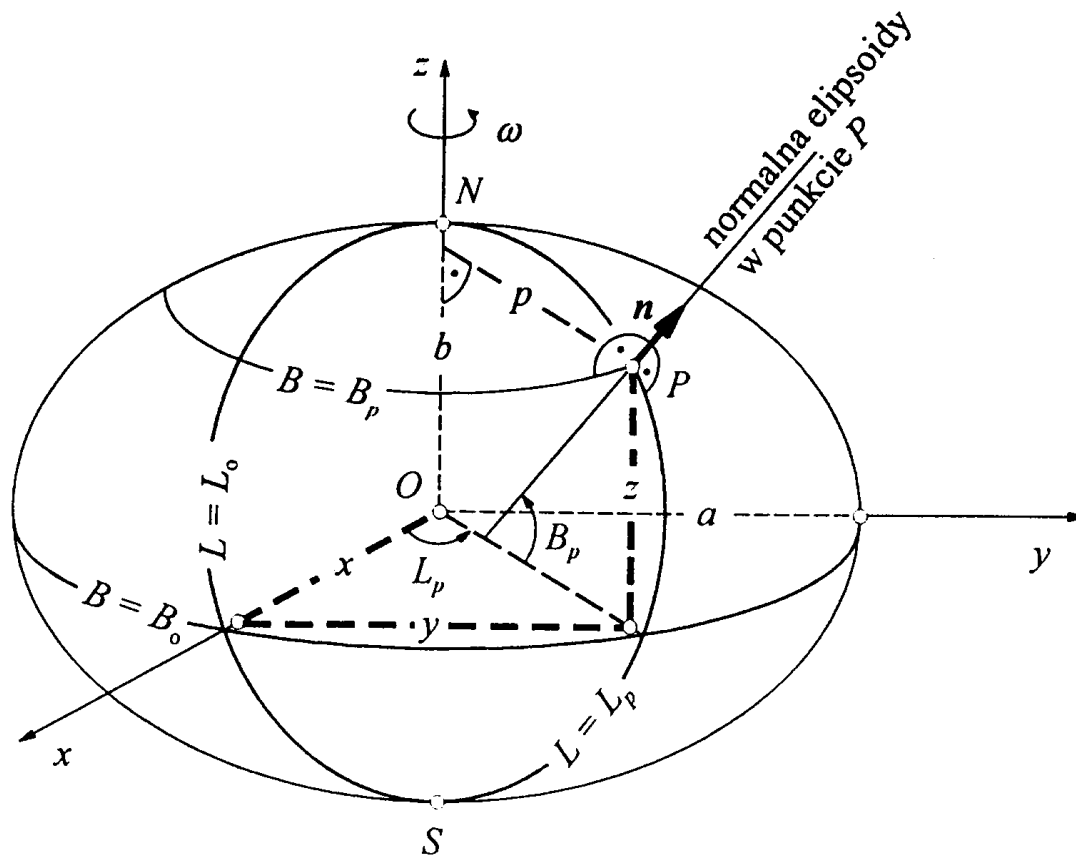
Szerokość φ , B, u



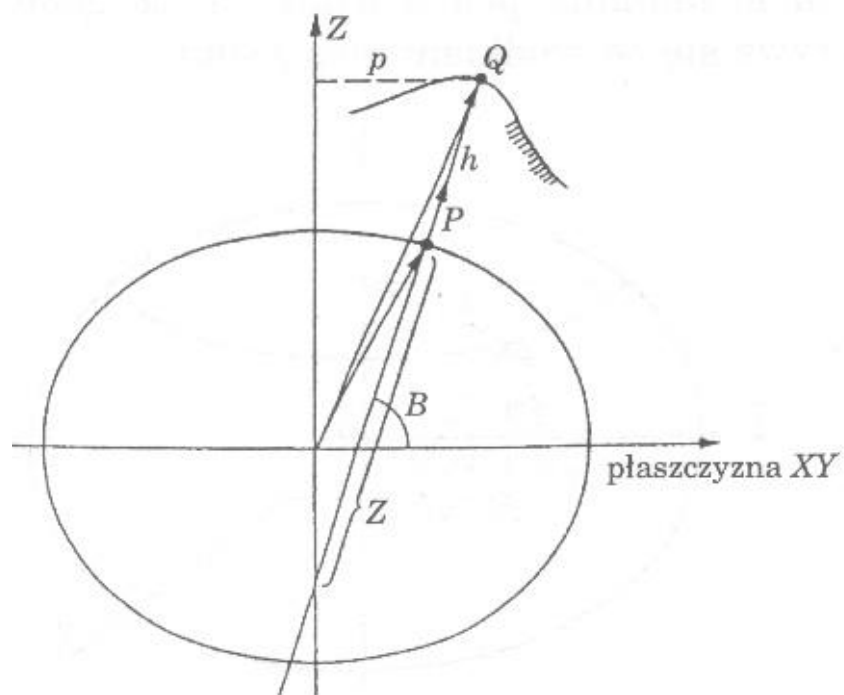
1. Szerokość geocentryczna – kąt zawarty między płaszczyzną równika a promieniem kuli przechodzącym przez dany punkt
2. Szerokość astronomiczna – kąt zawarty między płaszczyzną równika a linią pionu przechodzącą przez dany punkt
3. Szerokość geodezyjna – kąt zawarty między równikiem a normalną do płaszczyzny stycznej do powierzchni kuli w danym punkcie



Współrzędne elipsoidalne, prostokątne



Punkt położony nad elipsoidą

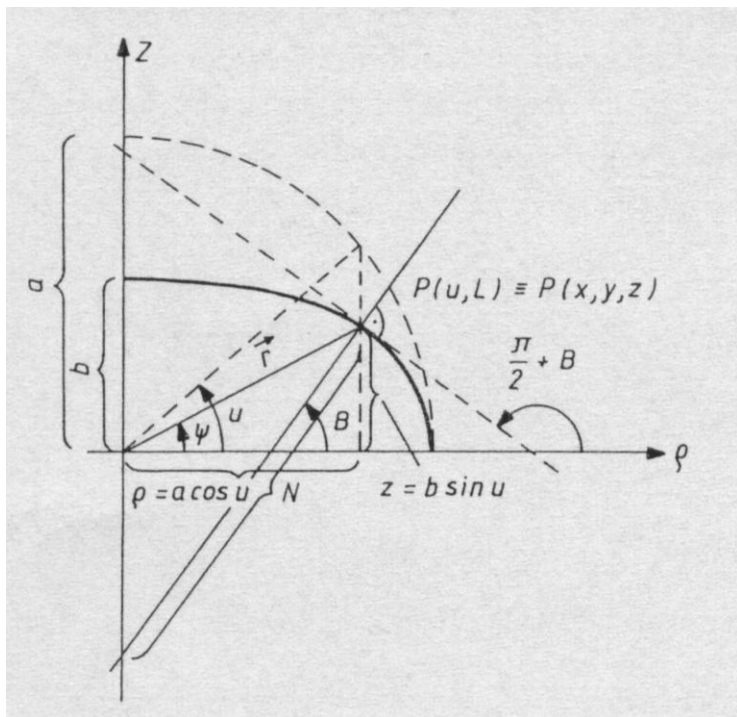


$$X_Q = (R_N + h) \cos B \cos L$$

$$Y_Q = (R_N + h) \cos B \sin L$$

$$Z_Q = [R_N(1 - e^2) + h] \sin B$$

Współrzędne geodezyjne zredukowane



$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \bar{x} = x \\ \bar{y} = y \\ \bar{z} = k \cdot z \end{bmatrix}, k = \frac{a}{b}; a, b \in R; b < a$$

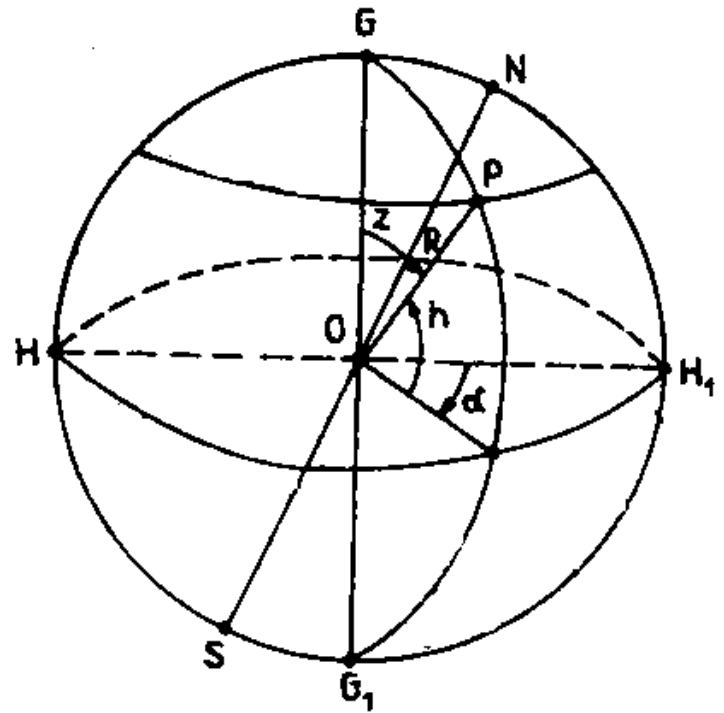
$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \bar{x} = a \cos u \cos L \\ \bar{y} = a \cos u \sin L \\ \bar{z} = b \sin u \end{bmatrix}$$

Układ współrzędnych azymutalnych

Położenie punktu w układzie współrzędnych azymutalnych określa się podając:

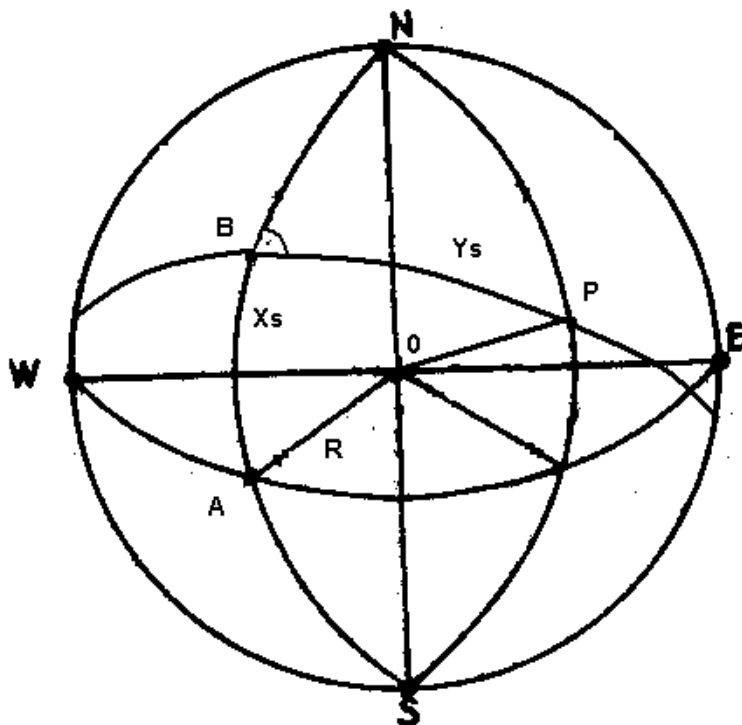
- azymut α
- wysokość h lub
- odległość zenitalną z

$$h = 90^\circ - z$$



Współrzędne sferyczne prostokątne

Aby określić położenie punktu P na powierzchni sfery, przyjmując należy południk osiowy oraz płaszczyznę do niego prostopadłą, będącą kołem wielkim, przechodzącą przez punkt P.



W wyniku przecięcia obu płaszczyzn powstaje punkt B.

Położenie punktu P wyznaczają łuki:

AB – odcięta sferyczna x_s

BP – rzędna sferyczna y_s

Relacja pomiędzy współrzędnymi azymutalnymi a geograficznymi

N, S – bieguny Ziemi

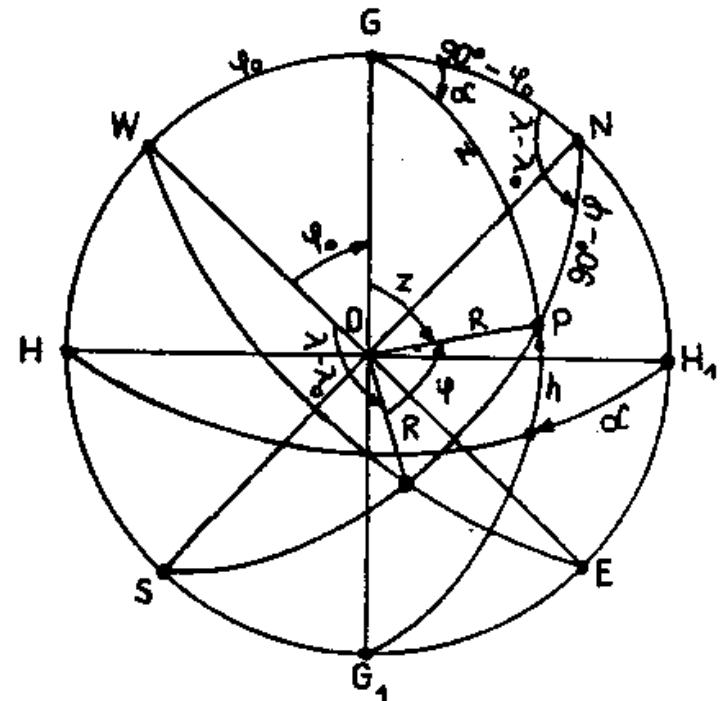
GG₁ – bieguny układu współrzędnych azymutalnych

Boki trójkąta sferycznego:

GN – łuk wertykału początkowego

NP – południk przechodzący przez punkt P

GP – łuk wertykału punktu P



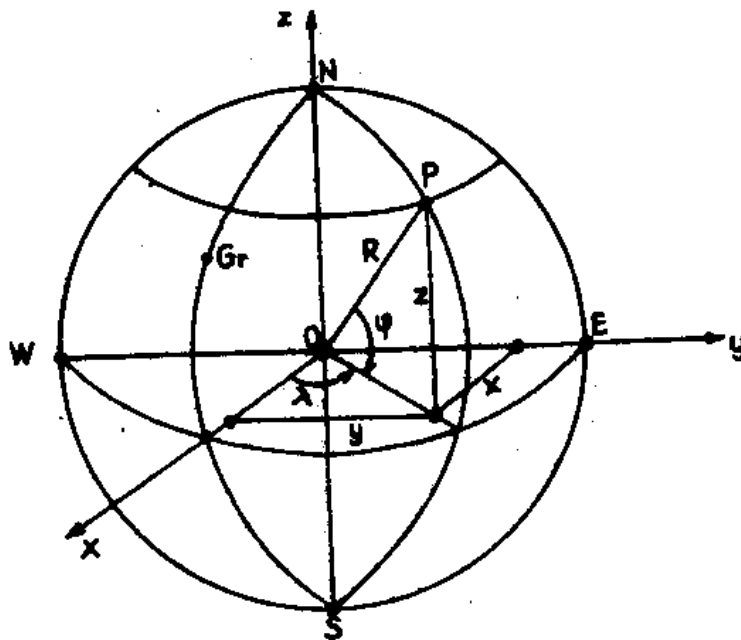
**Związek między współrzędnymi azymutalnymi
(z, α) i geograficznymi (φ, λ) punktu P:**

$$\cos z = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)$$

$$\sin z \cos \alpha = \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)$$

$$\sin z \sin \alpha = \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0)$$

Relacja pomiędzy przestrzennymi współrzędnymi prostokątnymi a współrzędnymi geograficznymi



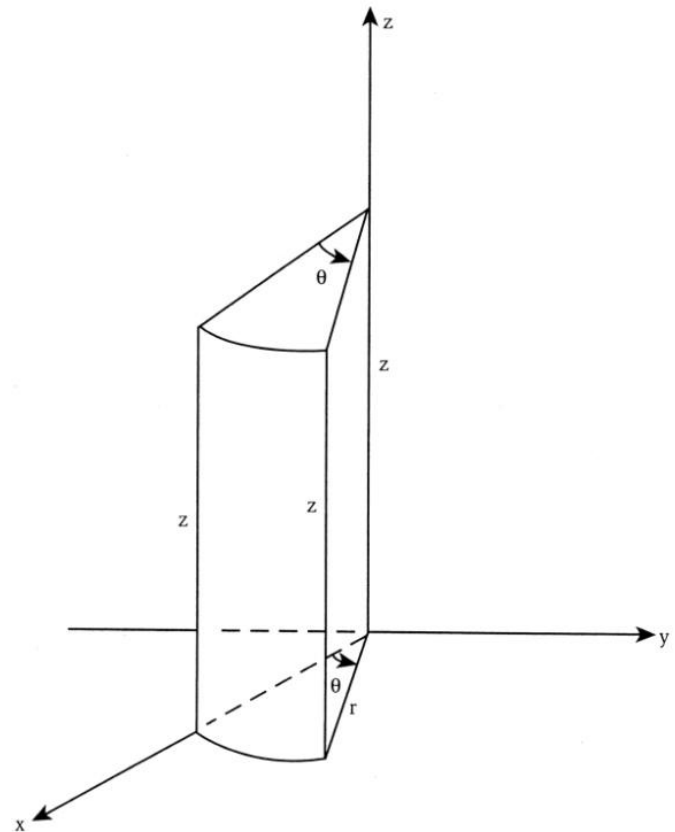
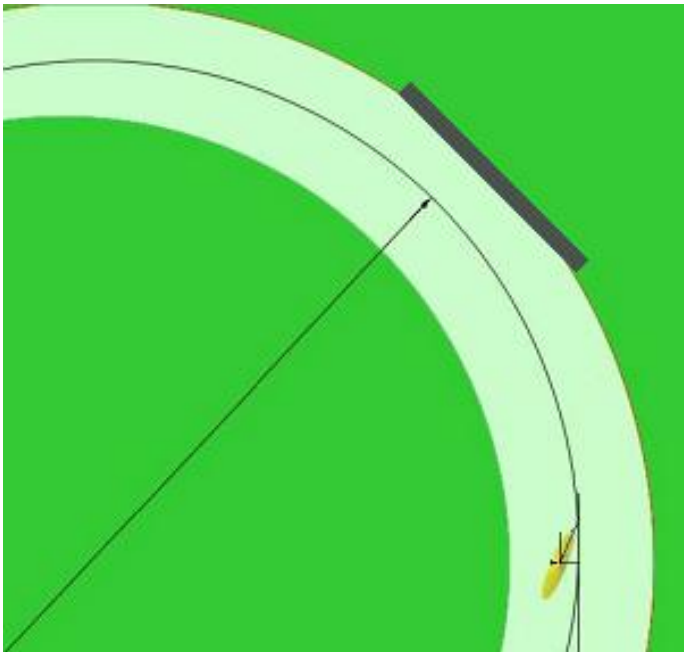
$$x = R \cos \varphi \cos \lambda$$

$$y = R \cos \varphi \sin \lambda$$

$$z = R \sin \varphi$$

Układ współrzędnych biegunowych, radialnych

Układ współrzędnych cylindrycznych



Układ współrzędnych torowych

Układ współrzędnych brzegowych

